

 **Universitat Autònoma de Barcelona**

Departament d'Economía Aplicada
PROGRAMA DE DOCTORADO EN ECONOMÍA APLICADA

TRABAJO DE INVESTIGACION NÚM 01 :

LA MEDIDA DE LA POLARIZACION:
SU FORMALIZACIÓN Y LA EVIDENCIA EMPIRICA

DIRECTOR:
XAVIER RAMOS MORILLA

4 CREDITOS DE INVESTIGACIÓN

LUIS HUESCA REYNOSO

FEBRERO DE 2003.

INDICE.	Pag.
1. Introducción	3
2. La Polarización: Concepto y medida	4
2.1 Enfoques y extensiones.	5
2.1.1 Propiedades de la medida ER.	6
2.1.2 Justificación de la extensión de ER:EGR.	8
2.2 Enfoques alternos y nuevas extensiones.	10
2.3 La medición formal de la polarización.	11
2.4 La bipolarización.	15
3. Evidencia empírica internacional.	16
3.1 Aplicaciones en EGR	
3.2 Aplicaciones con extensión de EGR	19
3.3 Enfoques alternativos	
4. Conclusión y línea de investigación.	21
Referencias.	23

1. Introducción.

La formalización del análisis de la polarización es reciente, y ha sido desarrollada durante los noventa por economistas que han tenido interés en cuestiones afines con el crecimiento económico, la convergencia y la desigualdad¹. El desarrollo teórico de la medida de la polarización se ha justificado por una diversidad de situaciones económicas y sociales, entre las cuales se podría prever que un cierto grado de agrupación o polarización en sí sería más relevante que aquel producido por la desigualdad. Así, dentro del estudio de las ciencias sociales coexisten ejemplos relevantes que facilitan el entendimiento del fenómeno, tales como las clases sociales, los conflictos raciales, de religión y de política.

El contexto de la Unión Europea y la entrada en los ochenta de España, Portugal y Grecia, marcaron la pauta que estimuló a los especialistas a buscar herramientas precisas que determinaran si con el paso del tiempo, los países mencionados iban a converger con respecto de aquellos más desarrollados, o si bien, se estarían formando dos grupos de países (o regiones) que compartirían características económicas determinadas y bien diferenciadas.

Por otro lado, la polarización también se percibió como concepto afín al tema de la desaparición de la clase media, fenómeno que en su momento inspiró una serie de trabajos enfocados dentro de la economía laboral (Rosenthal 1985; Horrigan y Haugen 1988). Dicha literatura mostró la falta de consenso en el objetivo de cuantificar formalmente el problema, dado que tan sólo relacionaba patrones de desigualdad creciente sobre razones de ingreso en cuantiles específicos en la distribución de los asalariados, mostrando a su vez resultados muy distintos y poco robustos².

Se presupone que la reducción de la clase media se ha presentado en la mayoría de los países debido al implemento de políticas económicas de corte neoliberal. La década de los ochenta marca una pauta en los EE.UU. al observarse un deterioro de éste grupo social debido a un fenómeno combinado de polarización y desigualdad en su sociedad (Esteban, *et al.* 1999: 15). El declive de la clase media en el análisis formal de la polarización, es entendido como un debilitamiento de los grupos de ingreso medio a costa de un aumento de los grupos extremos rico y pobre, lo que

¹ Al respecto, véase los estudios de Esteban y Ray (1994), Wolfson (1994 y 1997), Jenkins (1995), Quah (1997), Esteban *et al.* (1999) y Gradín (1999a).

² La gran inconsistencia en los resultados que provoca la utilización de éste tipo de medidas es expuesta en Wolfson (1994: 354).

en otras palabras se expresa como la formación distributiva de dos grupos poblacionales bien definidos y diferenciados entre sí.

Desde los años setenta se produjo un consenso en cuanto al instrumental y la medición de la desigualdad económica, siendo el eje vertebral el principio de transferencias de Pigou-Dalton (*PD*) y el criterio de dominancia de Lorenz. Además, la creación de un grupo de índices normativos, permitieron otorgar el grado necesario de sensibilidad a las transferencias en determinadas partes de la distribución, que quedaban fuera del alcance del principio *PD* (Atkinson, 1970). Estaba claro que las medidas sobre desigualdad señalaban la concentración, más sin embargo, y como fue señalado en su momento por Esteban y Ray (1994), Wolfson (1994 y 1997) y Jenkins (1995 y 1996), dichos índices no eran capaces de distinguir si la población se concentraría entorno a dos o más polos, o entorno a una media específica de ingreso.

El análisis formalizado de la polarización es abordado y expuesto rigurosamente por Esteban y Ray (1994). Este se sustenta en un modelo de actitudes individuales que se vincula a la existencia de conflicto social, de tal manera que la polarización es el resultado de agregar sentimientos de identificación entre individuos hacia un mismo grupo y de alienación entre individuos de distintos grupos. En su desarrollo justifican la insatisfacción de utilizar los índices clásicos de la desigualdad en el intento por estimar los efectos de la formación de grupos en las distribuciones. En adición, ofrecen un esquema capaz de medir la polarización desde un ámbito generalizado.

En este contexto, el objetivo central de este trabajo es por un lado, explicar conceptualmente el fenómeno de la polarización y su medición formal, y mostrar por el otro, la evidencia empírica existente del tema. La estructura del documento se presenta a continuación. La segunda parte expone la justificación de la creación de la medida formal de la polarización y las diversas extensiones y enfoques alternativos de ésta, la tercera describe los resultados de la evidencia empírica internacional existente, y de forma final, en la cuarta sección se esquematizan las conclusiones y la línea futura de investigación.

2. Polarización: Concepto y medida.

El concepto abreviado de la polarización se expresa en la noción de la *tensión social* entendida como aquel tipo de sociedad que se encuentra dividida en dos grandes bloques: pobres y ricos. De esta forma, la polarización indica el grado en el que la población se encuentra agrupada en torno a polos distantes (Esteban 1996: 7).

Curiosamente, el diseño de un índice capaz de medir la polarización se genera a principios de los noventa por la necesidad de detectar la tendencia hacia la formación de zonas tipo Centro-Periferia en el contexto europeo (Esteban y Ray 1991, y Esteban 1994). En estos trabajos se argumenta que la característica relevante del descontento social expresado en una distribución con potencial de generación de conflicto es su polarización y no su desigualdad. El principal hallazgo del documento de Esteban (1994) se centra en dos resultados: 1) que la polarización entre países disminuyó durante la década de los ochenta y 2) que la polarización a nivel regional aumentó en forma lenta pero sostenida. Esta tendencia manifestaría que todo el crecimiento experimentado por aquel grupo de países más retrasados se habría concentrado en sus regiones más ricas. El estudio indica que las especificidades regionales juegan un papel importante en la forma como se explica la polarización.

En general, los resultados obtenidos a nivel de países muestran que si bien una partición Centro-Periferia ha perdido fuerza, el concepto de una “Europa a dos velocidades” en tasas de crecimiento económico se adapta mejor a la explicación del fenómeno, donde aquellos países periféricos con niveles de renta más elevada han crecido más rápido, a diferencia de aquellos del centro con renta más baja, que experimentaron bajas tasas de crecimiento (Esteban 1994: 78).

2.1 Enfoques y extensiones.

El trabajo pionero de Esteban y Ray (1994) -ER- marca una pauta en la definición global de la polarización, no solamente por haber creado la estructura formal que dio cuerpo al fenómeno y que lo distinguió de aquel referido para la desigualdad, sino también por continuar siendo una fuente de inspiración en el tema. Es así como se han creado una serie de trabajos que intentan captar el fenómeno desde una perspectiva paralela (Gradín 2000), y también con propuestas de enfoques alternativos (Zhang y Kanbur 2001; Chakravarty y Majumder 2001; Wang y Tsui 2000; Quah 1997; Cowell, Jenkins y Litchfield 1996; y Jenkins 1995).

Por su parte, la idea de una sociedad con una clase media que tiende a reducir su participación dentro de la distribución del ingreso, ha sido abordada eficazmente en ER, por Wolfson (1994) -W- y más recientemente por Esteban, *et al.* (1999) -EGR- y Gradín (1999a).

2.1.1 Propiedades de la medida ER.

El trabajo de ER documenta un fenómeno que es ciertamente complejo, no solamente por la naturaleza global del concepto, sino por no existir en su momento axioma alguno que capturara su esencia. El concepto global de la polarización conllevó al establecimiento de un conjunto de axiomas que explicaran formalmente sus cambios e incrementos sobre una distribución, debido a que iguales direcciones de cambio distributivo podrían estar representadas con distintos efectos sobre la polarización.

De esta manera, ER demuestra de forma rigurosa una serie de casos en los que divergencia y convergencia entre la polarización y la desigualdad son permisibles. Establecen que cuando los cambios que se generan en una distribución (debido a transferencias progresivas de renta) provocan un fenómeno de convergencia hacia un promedio global específico, se detecta una reducción tanto de la polarización como de la desigualdad (ver figura 1A), mientras que un agrupamiento de hogares hacia distintos niveles de ingreso promedio (o modas específicas) genera una polarización creciente en una sociedad que muestra una reducción de la desigualdad (Esteban y Ray 1994: 821).

Por lo anterior, ER introduce cuatro propiedades que son fundamentales en la definición de la polarización de una distribución:

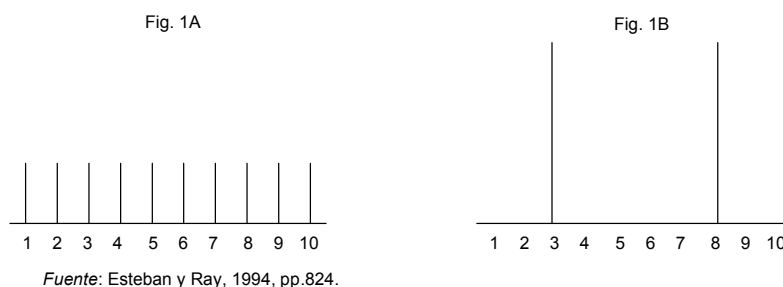
- a. La existencia de un alto grado de homogeneidad *dentro* de cada grupo (*Sentimiento de identificación de grupo*).
- b. La existencia de un alto grado de heterogeneidad *entre* los grupos (*Sentimiento de alienación*).
- c. Debe existir un número pequeño de grupos de gran tamaño.
- d. Los individuos aislados no generan conflictividad potencial.

Es así como la medida de la polarización se presenta en un modelo que caracteriza el comportamiento de cualquier individuo en función de una interacción entre dos sentimientos (de alienación y de identificación) que generan un fenómeno de *antagonismo efectivo*. Cada individuo ubicado en determinado grupo lo expresará hacia otro fuera de él. Si dicho fenómeno es creciente se presentará un grado más alto de identificación intra-grupo, que a su vez, reforzará el efecto de alienación. Entonces la polarización se concibe como la suma de todo el antagonismo efectivo intrínseco hacia la distribución³.

³ El enfoque ER establece todo un grupo de lemas y axiomas que representan las formas funcionales de las funciones de alienación y de identificación.

Al respecto, las figuras siguientes muestran el fenómeno descrito. La figura 1A concibe una sociedad que se encuentra distribuida de forma uniforme, separada equitativamente por los puntos 1, 2,...,10; mientras que la figura 1B indica que la distribución se encuentra concentrada de forma equitativa en los puntos 3 y 8:

Figura 1. Distribución uniforme y polarizada.

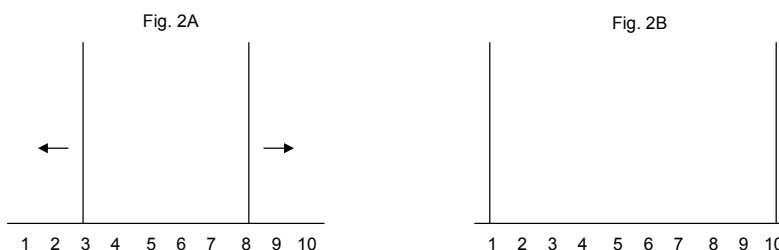


Este proceso permite comprender la primera propiedad (a) de la polarización, ya que al pasar de la figura 1A hacia la 1B los individuos se encuentran exactamente agrupados ya sea en una clase pobre o rica y la clase media es inexistente, lo que expresa una homogeneidad interna bien definida al interior de ambos grupos. Esta representación implica que la polarización se incrementó sin duda alguna, mientras que la desigualdad se habría reducido para cualquier medida consistente con el criterio PD^4 (Esteban y Ray 1994, 825).

Por otro lado, la segunda propiedad permite afirmar que una distribución se encuentra más polarizada en la medida que exista una mayor heterogeneidad entre los grupos. Este fenómeno se aprecia en la figura 2. Así se observa que al pasar de la situación anterior (descrita en la figura 1B) a una extrema donde los grupos pobre y rico ubicados en los ingresos 3 y 8 se trasladan ahora hacia los extremos 1 y 10, provocan una mayor heterogeneidad entre ambos sin modificar la homogeneidad interna. Por consiguiente, se observa un aumento tanto en la polarización como en la desigualdad en la figura 2B.

En este caso, la sociedad diverge aún más con respecto de su renta media global, y se estarían produciendo transferencias regresivas del grupo 8 hacia el 10, por lo que se formarían dos grupos mucho más definidos internamente entre sí, y mucho más heterogéneos con respecto a la situación anterior de la figura 1B.

Figura 2. Distribución polarizada acentuada.



Fuente: Esteban y Ray, 1994, pp.826.

La propiedad (c) hace referencia a que los grupos con un peso insignificante conllevan una reducida importancia, y por lo tanto, no son relevantes en el proceso de captar la formación de grupos. En general, es posible observar que la polarización es cuestión de grupos (propiedad d), donde los individuos distantes y aislados entre sí son incapaces de generar conflicto social⁵.

Toda medida de polarización debe satisfacer las características de *no-monotonicidad* y de *globalidad* (Esteban y Ray 1994: 823, 829). La primera establece que la variación en la polarización podría no ser la misma (esto es, no lineal) dado un cambio distributivo que incluya una serie monótona de pequeños cambios hacia una misma dirección, mientras que la segunda, implica que siempre se deberá considerar al conjunto de la distribución para conocer la dirección de movimiento de la polarización⁶.

2.1.2 Justificación de la extensión de ER: EGR

Debido a que la medida de la polarización en ER requiere que la información se encuentre preagrupada de alguna manera, la formación de los grupos en la distribución es determinada exógenamente, esto es, se presupone que los individuos ya están integrados en grupos diferenciados a través de intervalos y frecuencias seleccionadas de manera arbitraria. Lo anterior implicaba que no fuese utilizado el grado máximo de dispersión que pudiesen tener de forma interna los grupos y que a su vez, debilitaría la polarización que éstos generan. En Esteban (1996) se muestra

⁴ La polarización aumenta debido a que los grupos se encuentran ahora más cohesionados e identificados entre sí, mientras que la desigualdad se reduce por la razón de que se estarían produciendo transferencias progresivas de los grupos de ingreso alto hacia aquellos bajos.

⁵ En Esteban (1996: 7) se describe como un fenómeno de desigualdad extrema o de igualdad completa va a la par con un bajo nivel de conflictividad social.

⁶ Estas características no se cumplen para el caso de la desigualdad, debido a que el axioma Pigou-Dalton siempre conducirá a una menor o mayor desigualdad independientemente de las características de la distribución y del peso poblacional implicado en las transferencias.

que otra forma de agrupar los datos y ampliamente utilizada en el ámbito distributivo son los cuantiles, pero que ésta agrupación de datos es útil solamente en el análisis de la desigualdad. Para el caso de la polarización ésta agrupación esteriliza sus efectos distributivos debido a que la información es manipulada para que la frecuencia sea igual en todos los grupos existentes, no obstante que las distancias entre los ingresos sea dispar⁷.

De esta manera, partiendo de la necesidad de hacer más operable empíricamente el índice ER cuando las distribuciones no se encuentran preagrupadas, EGR aporta la extensión que permite introducir la falta de identificación al interior de los grupos. Su método propone endogeneizar los grupos, asignando los individuos dada su característica de ingreso por su mayor proximidad de tal manera que éstos no se solapen. Así los grupos se identifican lo más posible y al mismo tiempo, se diferencian entre sí. Finalmente, la polarización de los grupos es definida como aquella que resulta de descontar la falta de identificación interna de los mismos.

Por otro lado, cuando se forman dos grupos óptimos en la distribución, EGR demuestra que el índice de Wolfson (P^W) es tan solo un caso particular de su medida, denominada como la *bi-polarización*. La diferencia se basa en que mientras el índice P^W emplea solamente las distancias relativas de los grupos con respecto del punto central (la mediana) EGR utiliza como corte óptimo la media global de la distribución.

De esta manera, W muestra una situación particular que hace referencia a la forma en que una distribución se estaría volviendo más bimodal con 2 polos opuestos mutuamente separados; mientras en el caso general con la medida EGR, la medición de la polarización no solamente captura el fenómeno de la bi-polarización, sino que también permite expresar una partición óptima de la sociedad. Por ejemplo, al dividir la distribución en tres grupos, EGR cuantifica la participación poblacional de las tres clases socioeconómicas⁸ y estima su nivel de polarización, una vez obtenidos los ingresos de corte (endógenos) que distinguirán los grupos respectivos en las distribuciones.

⁷ El fenómeno se explica por que la medida de la polarización es lineal en las distancias y convexa en las frecuencias, mientras que aquellas en la desigualdad son lineales en las frecuencias y convexas en las distancias (Esteban 1996: 11).

⁸ Esta interpretación se basa solamente sobre la posición que cada grupo tiene en la distribución con respecto de su ingreso; sin embargo, los conceptos de clases sociales son extremadamente polémicos y no existe definición única al respecto.

2.2 Enfoques alternos y nuevas extensiones.

Los estudios de Jenkins (1995, 1996), Cowell, Jenkins y Litchfield (1996) y Quah (1997) son una muestra de enfoques alternos a la medida ER. En estos documentos se presenta un análisis gráfico de las funciones de densidad que presentan las distribuciones en distintos momentos en el tiempo, permitiendo visualizar la formación de grupos o modas sobre la distribución. La técnica empleada es no-paramétrica y conocida como *Kernel* la cual facilita analizar en detalle la forma de la distribución, y que en palabras de Cowell, *et al.* *permite dejar que la información y los hechos hablen por sí mismos tanto como sea posible* (Cowell, *et al.* 1996: 51).

Por su parte, Wang y Tsui (2000) proponen una nueva clase de índices utilizando dos axiomas de ordenamiento parcial siguiendo el esquema de Wolfson: El de bipolaridad y el de dispersión aumentada. Estos a su vez, permiten inducir de forma exógena un número k de grupos sobre la distribución.

Chakravarty y Majumder (2001) indican que los índices de desigualdad, bajo ciertas modificaciones, pueden ser eficaces en el diseño de índices alternos de polarización. En su caso utilizan el índice de Gini, el de Atkinson y el de Theil normalizado. En general, establecen que para cualquier función homotética de bienestar social corresponderá un índice distinto de polarización y que éstos diferirán solamente en la forma que se vea reflejada la desigualdad sobre los segmentos poblacionales y sus respectivos vectores de rentas (Chakravarty y Majumder 2001:7).

Zhang y Kanbur (2001) -ZK- muestran un procedimiento alternativo, el cual plantea mediante la descomposición de la desigualdad un indicador de la polarización por subgrupos de características sustentado bajo el principio *PD* y consistente con el criterio de Lorenz. El indicador es simple, y es definido como un cociente de la parte explicada sobre aquella no explicada de la descomposición de la desigualdad. La medida de ZK puede ofrecer un índice escalar de la polarización, ya que logra capturar la distancia promedio entre los grupos con relación a las diferencias de renta encontradas al interior de los mismos. Así, ZK establece que *en la medida que los grupos se hacen más homogéneos internamente y las diferencias de renta “dentro” de ellos disminuye, las diferencias entre los grupos son, en términos relativos, mayores* (aumenta la heterogeneidad) *por lo que la polarización también aumentará* (Zhang y Kanbur, 2001: 12).

En cierta forma, la ratio ZK adolece de una extrema sensibilidad cuando la característica empleada (manteniendo constante las demás) explica en mayor medida

la desigualdad (esto es, cuando la componente *entre-grupos* tiende a 1) lo que podría causar comportamientos erráticos en la medida.

Recientemente, Gradín (2000) generó una extensión de la medida EGR aplicable a subgrupos de la población sobre una distribución. De esta forma, demuestra la incidencia de la polarización sobre el impacto que tienen distintos grupos de hogares en la sociedad, asumiendo que éstos comparten otras características además del ingreso. Es así como el autor justifica que *aunque se consideren los grupos como clases de ingreso, uno debe considerar en que medida sus miembros son similares no únicamente sobre la base del ingreso, sino también sobre la base de otros atributos relevantes, por que puede existir una alta correlación entre el ingreso y otras características* (Gradín 2000: 458).

Es así como concibe los índices de la *polarización de grupo* (GP) y de la *bi-polarización explicada* (EP). Dentro de un conjunto de características dadas, el índice GP detecta cual de ellas es la que permite una mayor cantidad de formación de grupos, mientras que el índice EP explica cual es la característica que genera una mayor bi-polarización en la distribución manteniendo constante las demás.

Una limitación de esta extensión es el solapamiento que producen las particiones alternativas, dado que ahora éstas vienen dadas por la naturaleza de la propia característica, lo que implica que la formación de grupos en este caso no refleje necesariamente intervalos ó clases de ingreso. Por lo anterior y siguiendo el estudio de Yitzhaki (1994), introduce índices que cuantifican el problema, detectando de esta forma cual característica presentaría un nivel de solapamiento mínimo, que a su vez, representaría la variable con mayor capacidad de *clustering* sobre la distribución. Es importante aclarar, que ninguno de los dos índices permite aislar el impacto que tiene cualquier característica sobre la polarización, debido al elevado nivel de correlación que se presenta entre ellas; sin embargo, sí pueden identificar cual atributo sería más relevante en la formación de grupos, así como también describir la tendencia específica para cada variable en el tiempo.

2.3 La medición formal de la polarización

A diferencia de la noción de desigualdad, la polarización hace referencia a la formación de k grupos en una función de distribución F^g definida por su densidad,

⁹ Este tipo de distribución es continua y generalmente unimodal. No obstante, en la formación de “polos” o grupos poblacionales sobre la distribución del ingreso, como señala Esteban (1996: 11), no

alcanzando su máximo nivel cuando la población está fraccionada en dos grupos internamente homogéneos y situados en los extremos de ésta. Por la propiedad de identificación, la medida depende no solamente del número de individuos similares en la formación de un grupo, sino también de las características comunes que éstos comparten, que en éste caso es el ingreso. Debido a que únicamente las diferencias relativas importan (Esteban y Ray 1994: 829) el ingreso debe ser transformado con logaritmos neperianos o en su defecto, ser normalizado por la media global.

De esta manera y siguiendo la notación de ER, un individuo con ingreso x sentirá identificación de grupo $I(x, F)$ dentro de una distribución dada F , y expresará alienación $r(x, y)$ con respecto de aquel individuo con ingreso y . Así, el antagonismo efectivo de x hacia y presenta una función creciente de la forma $T(I(x, F), r(x, y))$ tal que el antagonismo efectivo aumentará con la alienación pero se aminorará con el sentimiento de identificación. La agregación del antagonismo efectivo generado en la distribución se expresa de la siguiente manera:

$$P(f) = \int_0^1 \int_0^1 T(I(x, F), r(x, y)) dF(x) dF(y) \quad (1)$$

La medida descrita en estos términos es continua y no presenta operatividad alguna, por lo que a continuación se presenta su notación más precisa y aplicable en el entorno empírico.

Denotando el dominio D de toda distribución, se tiene que la medida de la polarización se elabora en un espacio $P: D \rightarrow \mathfrak{R}_+$. Así tenemos que, para cualquier distribución F , siempre que $y \in \mathfrak{R}^n$, $y_i \neq y_j$ para todo i, j y $\rho > 0$, su representación simplificada se expresa por una partición $\rho = (z_0, z_1, z_2, \dots, z_k; y_1, y_2, \dots, y_k; \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k)$ que delimita k grupos sin cruce alguno, con ingresos de corte $z_0 < \dots < z_k$. Los ingresos de cada individuo y la población relativa de los grupos se expresan como y_i y ρ_i respectivamente. Esta partición define los grupos dentro de un intervalo de ingresos $[z_{i-1}, z_i] \forall i = 1, \dots, k$. De este modo, si la función de identificación es representada por $\rho_i^{1+\alpha}$ y la de alienación por $|y_i - y_j|$, la formula propuesta por ER aplicada en ρ es la siguiente:

tiene sentido considerar que dos individuos con ingresos muy similares, aunque distintos, pertenecerán a grupos diferentes. Por su parte, Gradín (1995) muestra como la polarización y la desigualdad se comportan de manera distinta para este tipo de distribuciones.

$$ER(\alpha, \rho) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k p_i^{1+\alpha} p_j |y_i - y_j| \quad (2)$$

El parámetro α requiere especial atención, ya que representa una constante positiva que captura la importancia de identificación de grupo, y es precisamente la presencia de la identificación la que distingue una medida de polarización de aquella utilizada para la desigualdad. Por lo tanto, α pondera la relevancia hacia la formación de grupos en la distribución, reflejando entonces la sensibilidad hacia la polarización.

El término α no puede tomar valores arbitrarios, debido a que existe un punto máximo en el cual la función de identificación dejaría de satisfacer los axiomas inherentes a la medida, por lo que debe acotarse dentro de un intervalo [1, 1.6] (Esteban y Ray, 1994: 834). La función de identificación debe ser de la forma $I(x, F)^\alpha = I(p^\alpha)$, con $\alpha > 0$. Si $\alpha = 0$, el índice obtenido de la fórmula (2) resulta ser una transformación escalar del coeficiente de Gini, es por ello que el exponente que pondera la población es elevado en la fórmula a una potencia que excede la unidad ($1+\alpha$), otorgando de esta manera el comportamiento requerido por la medida de la polarización. Es así como se asume que α puede tomar tres valores: 1 para un parámetro de baja sensibilidad; 1.3 para uno moderado; y 1.6 para la máxima sensibilidad.

Por su parte, y desde un punto de vista estadístico, ρ es una representación de F que induce un término de error $\in(F; \rho)$ que explica la falta de identificación en el interior de los grupos debido a la existencia de dispersión interna. De esta forma, la extensión EGR es expresada como la estimación de (2) sustrayendo el término de error de la siguiente forma:

$$EGR(F; \alpha, \beta, \rho) = ER(\alpha, \rho) - \beta \in(F, \rho) \quad (3)$$

El índice EGR está acotado entre $[0, 2]^{10}$ en tanto no presenta límite superior cuando el ingreso es expresado en logaritmos neperianos -como ocurre en ER-. β es un parámetro libre acotado entre $[0, 1]$ que asigna el peso a la falta de identificación interna $\in(F; \rho)$. Cuando el parámetro $\beta = 1$ se asigna todo el peso de la falta de identificación interna entre los k -grupos, haciendo referencia a la *polarización extendida* en EGR, mientras que cuando $\beta = 0$ se hace referencia a la medida *simple*

¹⁰ Al condicionar el ingreso por la media, se logra que la medida alcance su máximo valor cuando la distribución sea simétrica, esto es, la mitad de la población en cada extremo: $0.5(y_1 + y_2)$.

de polarización en ER. El uso de diferentes valores entre α y β permite demostrar lo robusto de la medida a nivel empírico, sin importar el número de grupos asumido en la distribución. Por el contrario, el caso de $\alpha = 1$ y fijando el máximo peso admitido $\beta = 1$, permitirá al investigador establecer si bien, la bi-polarización se ha incrementado o reducido, a pesar de la sensibilidad de la medida hacia las transferencias ocurridas en cualquier parte de la distribución. En general, siempre existirá un número de grupos (endógenos) que minimice el error de dispersión y que represente el nivel máximo de polarización para un nivel dado de β .

El término de error ϵ se caracteriza como el nivel de dispersión *dentro* de los grupos, y es factible minimizarlo a través de la descomposición del coeficiente de Gini, al ser expresado en términos de la media de todas las distancias de ingreso entre los individuos de los k grupos¹¹. Lo anterior se expresa como la sustracción de la desigualdad en la representación de ρ de aquella estimada para la distribución original en F :

$$\epsilon(F; \rho) = G(F) - G(\rho) \quad (4)$$

Para determinar la polarización de los grupos de forma endógena, se obtiene una partición óptima para cualquier agrupación con $k \geq 3$, y se generaliza en $\rho^* = (z_0^*, z_1^*, \dots, z_k^*; y_1^*, \dots, y_k^*; p_1^*, \dots, p_k^*)$ utilizando el siguiente algoritmo propuesto en Esteban, *et al.* (1999):

$$z_i^* = \frac{p_i^* y_i^* + p_{i+1}^* y_{i+1}^*}{p_i^* + p_{i+1}^*} \quad (5)$$

La expresión (5) muestra que es factible encontrar la partición óptima de una distribución entre dos grupos adyacentes, como un ingreso promedio conjunto de ambos grupos. De este modo, se muestra finalmente la medida EGR que estima la polarización en F para k grupos endógenos:

$$P(F; \alpha, \beta, \rho^*) = ER(\alpha, \rho^*) - \beta [G(F) - G(\rho^*)] \quad (6)$$

El índice P tiene la propiedad de homoteticidad que es estándar en el entorno de la desigualdad y es denotada como condición H (Esteban y Ray, 1994: 830).

¹¹ El término de error mide la componente intra-grupo de la descomposición del Gini en un componente *dentro* y uno *entre*. Al respecto, Pyatt (1976: 249.); y Mookherjee y Shorrocks (1982: 888.) han demostrado que cuando los ingresos de un grupo hacia otro no se solapan (como en este caso) tal descomposición existe.

Condición H: si $P(p, y) \geq P(p', y')$ para dos distribuciones (p, y) y (p', y') , entonces para todo cambio $\lambda > 0$, $P(\lambda p, y) \geq P(\lambda p', y')$.

Esta propiedad hace alusión a que el ordenamiento inducido por la medida sobre dos distribuciones no variará con respecto de su tamaño poblacional.

2.4 La bipolarización.

Cuando se asume que la población se encuentra dividida en dos grupos, el ingreso medio define a la partición óptima z que separa los grupos pero que al mismo tiempo minimiza el término de error ϵ en la fórmula (3). Cuando $k = 2$ la estimación dividirá a la población en dos y después calculará la bipolarización entre ambos grupos, descontando respectivamente la falta de identificación interna. Así, una partición óptima dividirá a los que se encuentren por debajo de la media de los que estén por encima ($P_\mu = F(\mu)$); y como situación particular, el índice P^W en el caso en que la mediana indique el punto de corte ($P_m = F(m)$). En el caso óptimo¹² se tiene que $\alpha = \beta = 1$ y la formula a estimar en P_μ se convierte en:

$$P(F; \alpha = 1, \beta = 1, z = \mu) = 2[p_\mu - L(p_\mu)] - G(F) = 2D(F) - G(F) \quad (7)$$

donde $L(P_\mu)$ es la ordenada de Lorenz correspondiente al ingreso medio, por lo que la diferencia $P_\mu - L(P_\mu)$ se puede expresar con la desviación relativa media en $D(F)$ como:

$$D = p_\mu - L(p_\mu) \quad (8)$$

y la respectiva para el índice P^W es:

$$P^W = 2 \frac{\mu}{m} P(F; \alpha = 1, \beta = 1, z = m) = 2 \frac{\mu}{m} \left[2 \left[\frac{1}{2} - L\left(\frac{1}{2}\right) \right] - G(F) \right] \quad (9)$$

Aquí, el índice expresado en la fórmula (7) tomará valores entre [0,2] mientras que (9) estará acotado entre [0,1] ya que W define el área total de la bipolarización $P_m = B(m, q)$ como cuatro veces el valor de 0.25 de una distribución perfectamente bimodal (Wolfson 1994: 356).

En este sentido, ambas medidas de bipolarización podrán moverse en la misma dirección para cualquier par de ingresos (x e y) si y sólo si ocurriesen transferencias en el mismo lado de la distribución (Gradín 1999b: 13):

$$y \leq \min(\mu, m) \quad \text{ó} \quad x \geq \max(\mu, m)$$

por lo tanto, si $x < y \leq z$ se observara un incremento, ó en su defecto decreciente si $z \leq x < y$. En el primer caso, una transferencia de un individuo a otro más pobre incrementará la bi-polarización siempre que éstos se encuentren del mismo lado (de la mediana o de la media), mientras que en la segunda situación se reducirá. Con respecto de la relevancia entre una u otra medida (P vs. P^W) el proceso dependerá finalmente sobre los cambios ocurridos en la relación (μ/m) , cuya razón implicará cual de ellas capta en mayor magnitud el fenómeno.

3. Evidencia empírica internacional.

3.1 Aplicaciones en EGR.

Los análisis que presentan Esteban *et al.* (1999) y Gradín (1999a) permiten realizar una comparación internacional de la medida de la polarización, al estimar los índices para una amplia serie de países¹³. La serie de años no es completamente homogénea entre los países considerados, sin embargo, es posible realizar un análisis de las tendencias globales durante un período razonable.

Esteban *et al.* (1999) muestra una tendencia al aumento de la polarización durante 1974-1997 en la mayoría de los países analizados, que con excepción de Alemania y Canadá, el Reino Unido y los EE.UU. son los que detentaron los niveles más elevados de polarización durante el período. Así, se observa que para 2, 3 y 4 grupos, considerando los tres valores de sensibilidad en α , la polarización se incrementó desde un 10 hasta un 20%, tomando lugar la mayor parte de éste aumento entre 1979-1986 y 1991-1994.

El cuadro 1 muestra el índice de la polarización para 2 y 3 grupos entre 1984 y 1997. En general se confirma una tendencia hacia un proceso de creciente polarización en varios países durante las últimas dos décadas. Por niveles destacan Rusia, los EE.UU., Inglaterra, Australia, Hungría y Suecia; mientras que Alemania, Francia, España, Canadá y los países nórdicos muestran cambios decrecientes.

Los países que han experimentado mayor polarización localizan una proporción más alta de su población en los grupos de ingreso bajo y en menor

¹² En este caso, las diferencias en ambos índices vendrán dadas por la estructura (y tratamiento otorgado) de las transferencias, donde un cruce progresivo de renta tanto de la mediana como de la media, provocará una reducción de la polarización y viceversa.

medida, en aquellos de ingreso elevado cuando los grupos se determinan endógenamente (Gradín 1999a: 64), lo que es indicativo de que un trasvase del grupo medio hacia el pobre incrementará la polarización, a pesar de que el grupo rico no sea tan relevante. La polarización se caracteriza entonces por una distancia creciente tanto de los ingresos extremos como entre los grupos, que a su vez, muestran una mayor identificación interna.

Cuadro 1. Índices de Polarización en una selección de países, ($\beta=1$).

País	Año	2 grupos				3 grupos			
		$\alpha=1$		$\alpha=1.6$		$\alpha=1$		$\alpha=1.6$	
		ER	P	ER	P	ER	P	ER	P
Alemania	1984	0.186	0.107	0.125	0.046	0.149	0.112	0.079	0.042
	1989	0.184	0.102	0.123	0.042	0.149	0.111	0.079	0.041
	1994	0.193	0.108	0.130	0.045	0.156	0.116	0.083	0.043
Canadá	1987	0.218	0.130	0.146	0.058	0.174	0.132	0.092	0.050
	1991	0.212	0.125	0.142	0.055	0.169	0.128	0.089	0.047
	1994	0.214	0.128	0.144	0.058	0.170	0.128	0.089	0.048
EE.UU.	1986	0.254	0.151	0.169	0.067	0.203	0.155	0.107	0.059
	1991	0.256	0.152	0.172	0.068	0.205	0.157	0.108	0.060
	1994	0.273	0.162	0.184	0.073	0.219	0.167	0.116	0.065
España	1997	0.275	0.161	0.188	0.073	0.222	0.168	0.121	0.067
	1980	0.218	0.122	0.149	0.053	0.185	0.141	0.101	0.057
	1990	0.204	0.114	0.140	0.050	0.172	0.131	0.094	0.052
Inglaterra	1986	0.217	0.127	0.147	0.057	0.174	0.129	0.093	0.048
	1991	0.251	0.153	0.171	0.072	0.201	0.154	0.108	0.062
	1995	0.247	0.147	0.168	0.068	0.198	0.150	0.107	0.059
Suecia	1987	0.163	0.090	0.108	0.035	0.131	0.095	0.068	0.032
	1992	0.170	0.093	0.111	0.036	0.135	0.098	0.070	0.034
Australia ¹³	1985	0.182	0.098	-	-	0.136	0.096	-	-
Dinamarca ¹³	1989	0.189	0.099	-	-	0.142	0.098	-	-
	1987	0.153	0.066	-	-	0.117	0.076	-	-
Francia ¹³	1991	0.139	0.061	-	-	0.104	0.066	-	-
	1984	0.184	0.083	-	-	0.142	0.093	-	-
Hungría ¹³	1989	0.173	0.077	-	-	0.132	0.087	-	-
	1991	0.157	0.068	-	-	0.118	0.075	-	-
Noruega ¹³	1995	0.167	0.074	-	-	0.126	0.082	-	-
	1986	0.138	0.066	-	-	0.102	0.069	-	-
Rusia ¹³	1991	0.136	0.062	-	-	0.101	0.066	-	-
	1992	0.243	0.109	-	-	0.198	0.136	-	-
Uruguay	1995	0.252	0.117	-	-	0.206	0.143	-	-
	1989	0.218	0.105	-	-	0.170	0.118	-	-
	1997	0.227	0.111	-	-	0.178	0.125	-	-

Fuente: Elaborado con base a: Esteban *et al.* (1999) Cuadro 1 y 2; Gradín (1999a) Cuadro 5; y Gradín y Rossi (2001) Cuadro 1 y 2, Apéndice.

¹³ La polarización en éstos países ha sido estimada con $\alpha=1.3$.

Las particiones óptimas de los hogares en el grupo medio reportadas por Gradín (1999a: 62, 63) indican que el declive más notorio se produce en Hungría, al pasar de

¹³ Emplean las bases de datos del *Luxembourg Income Study* (LIS) y del *Panel Study of Income Dynamics* (PSID) de la Universidad de Michigan. Ambas bases presentan el ingreso total disponible equivalente de los hogares con la escala de la OCDE.

40.4% en 1991 a 35.9% en 1995, mientras que el mayor aumento se encuentra en Noruega de 37.3% en 1979 a un 42.8% en 1991.

El trabajo de Gradín (1999b) muestra que en España la polarización tanto del ingreso como del gasto de los hogares ha decrecido con mayor énfasis durante los años ochenta. La participación del grupo rico sobre el pobre entre 1973-91 se redujo de 4.5 a 3.64 en el caso del ingreso y de 4.65 a 3.79 en el del gasto. De este modo, el nivel de polarización ha descendido debido a que la brecha de ingresos y gastos entre los grupos extremos se redujo, junto a un pequeño aumento de la población del grupo medio a costa del rico y del pobre (Gradín 1999b: 25).

En el caso de la América Latina, tan solo se encuentran tres estudios disponibles sobre polarización. El trabajo de Gradín y Rossi (2001) para Uruguay, el de Bichernall (2001) para Colombia y el de Paraje (2001) de Argentina, los cuales muestran un resultado común: niveles crecientes de polarización.

Gradín y Rossi (2001) explican el fenómeno de la bipolarización creciente de la clase asalariada en Uruguay, y detectan un proceso de *clustering* que si bien, muestra una reducción de la desigualdad, ha generado una mayor dualización de la distribución, donde los premios al creciente capital humano aparecen como los principales factores que separan los polos, generando hasta un 55% de ésta. En 1997, la presunta clase media en Uruguay ubica su nivel relativo de hogares en 37%.

En el caso Colombiano, se observa que la polarización en el ingreso de los hogares se incrementó sustancialmente a partir de 1993, y sugiere a través de un modelo VAR, que el fenómeno de la polarización en el largo plazo ayuda no solamente a predecir la desigualdad del ingreso (medida por el coeficiente de Gini) sino también el crecimiento económico del PIB, sin embargo en el corto plazo la relación se muestra inestable y desaparece (Birchenall 2001: 280-81).

En la segunda mitad de los noventa, Argentina expresa un deterioro más intenso de (bi)polarización, que confirma (junto a la reciente crisis económica y política del 2002) la formación de dos polos en cada extremo de la distribución, con una sociedad en conflicto social caracterizada por una desaparición gradual de sus grupos medios de ingreso (Paraje 2001: 38). En la representación de tres grupos, el grupo pobre en Argentina representó un 47%, la clase media un 36% y el grupo rico el 17% de sus hogares en 1999.

3.2 Aplicaciones con extensión de EGR.

El estudio de Gradín (2000) calcula los índices *GP* y *EP* para el caso español entre 1973-91, e indica que a pesar de la reducción de la polarización en el país, existen características que empujaron el fenómeno en sentido contrario. Su resultado muestra que las características que más influyeron en la formación de grupos y presentaron un menor nivel de solapamiento (mayor estratificación) durante el período, fueron el nivel educativo, la condición socioeconómica y la zona de residencia del jefe de familia. Resalta de manera especial que durante los ochenta se presenta una brecha creciente entre las provincias pobres de las regiones ricas y las provincias ricas ubicadas en regiones pobres, dado que el gasto creció a una tasa más lenta en éstas últimas. Este suceso provocaría que la polarización de grupo aumentara en ésta variable sin importar el peso asignado en β .

Otra extensión se encuentra en el documento de D'Ambrosio y Gradín (2001), donde muestran el caso de la polarización intergeneracional y la exclusión social infantil para España e Italia. Utilizando el índice *GP* con particiones por grupos de edad y por nivel educativo e imputando los gastos gubernamentales en educación y en sanidad a los ingresos familiares, encuentran un importante aumento de la polarización intergeneracional en ambos países. Durante los ochenta, los infantes en España que residían en hogares donde el sustentador principal era retirado ó auto-empleado se beneficiaron más que aquellos en uno donde el sustentador no tenía trabajo, mientras que en el caso italiano, los más favorecidos fueron aquellos ubicados en hogares donde el sustentador no tenía trabajo o estaba retirado. En los noventa, la posición de los grupos en Italia fue similar de la respectiva para España, donde el grupo infantil mejor posicionado fue aquel en hogares con dos perceptores y un único niño, en tanto el peor, se distinguió por tener un solo perceptor y más de dos niños adicionales (D'Ambrosio y Gradín 2001: 22).

3.3 Enfoques alternativos.

Los trabajos de Cowell *et al.* (1996) y Jenkins (1995, 1996) emplean la base de datos de los hogares con ingresos por debajo del promedio (HBAI) del Reino Unido y muestran gráficamente la formación de “modas” sobre la distribución del ingreso del Reino Unido, detectando que éstas se acentuaron prominentemente entre 1981 y 1991. Su análisis descompone las densidades por subgrupos de población y entre las

causas principales que generaron el fenómeno esta la distinción entre hogares asalariados y no asalariados.

Los autores establecen que sus resultados difieren con aquellos encontrados por otro estudio similar¹⁴ que muestra para ciertos colectivos la tradicional forma unimodal característica en este tipo de distribuciones, debido esencialmente a que no valoraron adecuadamente los ingresos de los hogares y su ponderación poblacional respectiva (Cowell *et al.* 1996: 63).

Jenkins (1995, 1996) encuentra evidencia de una reducción en la concentración de individuos con ingresos de nivel medio, a lo que denomina, *una disminuida clase media* (Jenkins 1995: 412). Sustenta que los cambios distribucionales ocurridos entre 1979 y 1990/91 obedecen a una mayor polarización entre aquellos trabajadores de tiempo completo en conjunto con una mayor desigualdad dentro del colectivo de los trabajadores de tiempo parcial.

Chakravarty y Majumder (2001) cuantifican el nivel de polarización para la India entre los períodos 1987-88 y 1993-94 en el entorno rural y urbano, utilizando el gasto per cápita como proxy de la renta. Encuentran que la polarización rural no sufrió cambios considerables mientras que aquella en el ámbito urbano se incrementó de forma sustancial. Su aplicación empírica confirma que en algunos casos de zonas urbanas la polarización se comportó de forma inversa a la desigualdad, mientras aquellas rurales generalizaron un patrón decreciente y estable de la desigualdad y la polarización respectivamente.

Por su parte, Zhang y Kanbur (2001) ilustran su enfoque alterno aplicado para la China, y encuentran que las medidas de la polarización no se comportan de forma distinta con respecto de aquellas estimadas para la desigualdad durante 1983-95. Su análisis descompone la desigualdad entre la zona urbano-rural por un lado, y entre las principales provincias e interior del país por el otro, encontrando que si bien la medida ZK es más alta en el primer caso (y por lo tanto, su nivel de polarización) debido al mayor componente *entre* grupos, ésta tiene a reducirse hasta en un 32.5% durante el período, mientras que en el segundo, la ratio aumenta hasta un 184%. Este fenómeno implica que las fuerzas de crecimiento económico y distribución han provocado un incremento sustancial de la polarización entre el interior y las principales provincias del país, en tanto para el entorno urbano-rural ha significado una modesta reducción.

¹⁴ Véase Marron y Schmitz (1992).

4. Conclusión y línea de investigación.

El repaso de la literatura sobre el tema de la polarización, permite entender el fenómeno como la formación de grupos en una sociedad que hace referencia a dos situaciones consistentes:

1) De convergencia/divergencia hacia una misma/distinta media, explicada por una reducción tanto de la desigualdad como de la polarización en el primer caso y el fenómeno contrario en el segundo; y 2) de un *clustering* con respecto a diversas medias locales, proceso que impone una relación inversa entre polarización y desigualdad.

A nivel internacional, los resultados empíricos indican que la polarización es un fenómeno más o menos generalizado y que sus cambios se muestran robustos a los distintos valores de α y β . La polarización se ha acentuado durante los ochenta en el Reino Unido y los EE.UU. alcanzando su máximo nivel en la expresión de dos grupos en el primer caso y con tres grupos para el segundo. La tendencia ha sido decreciente para los casos de Canadá, Alemania, España y los países bajos. En éste ámbito, los efectos fueron producidos esencialmente por una creciente brecha de ingreso entre los grupos extremos y un aumento significativo del tamaño poblacional en la cola baja de las distribuciones.

Por su parte, el caso español muestra que la variable educativa y las especificidades regionales son determinantes tanto en la formación de grupos como en el proceso de explicación de la polarización cuando la partición relevante no refleja necesariamente intervalos de ingreso.

Para el caso mexicano no existe evidencia empírica que refleje y cuantifique la polarización, sin embargo, la existencia de crisis económicas recurrentes en las dos últimas décadas y de conflictos sociales al interior de las entidades más pobres del país, justifican un estudio aplicado sobre el tema con el objetivo de determinar distintos patrones de comportamiento sobre la distribución del ingreso que permitan la comprensión e incidencia del fenómeno sobre los grupos sociales. El análisis de la *desaparición de la clase media* es un apartado interesante del trabajo de investigación a desarrollar.

Así, gracias a la disponibilidad de bases de datos sobre renta y características socioeconómicas de los hogares durante 1984-2000, se podrá realizar un trabajo empírico que muestre los niveles de polarización en la distribución mexicana del ingreso y al mismo tiempo, determine sus causas durante el período referido. También

se podrán realizar comparaciones de los hallazgos con los estudios ya existentes para otros países.

Las distintas extensiones de la medida de la polarización permitirán probar hipótesis adicionales para comprender la complejidad del fenómeno y lo robusto de los datos. Finalmente, la implementación de modelos econométricos del tipo discreto será esencial para aproximar los resultados de forma precisa a la realidad y su impacto sobre la presunta clase media. De esta manera, se buscará que el desarrollo de la investigación genere una línea continua de largo plazo.

Referencias.

- Atkinson, A. B. (1970) "On the Measurement of Inequality", *Journal of Economic Theory*, 2, 244-63.
- Birchenall, J. (2001), "Income distribution, human capital and economic growth in Colombia", *Journal of Development Economics*, Vol. 66, 271-287.
- Chakravarty, S. R. y A. Majumder (2001) "Inequality, Polarisation and Welfare: theory and Applications", *Australian Economic Papers*, 40, March, 1-13.
- Cowell, F., S. Jenkins y Lithfield (1996) "The Changing Shape of the UK Income Distribution: Kernel Density Estimates." In John Hills (ed.), *New Inequalities: The Changing Distribution of Income and Wealth in the United Kingdom*. Cambridge University Press, 49-75.
- D'Ambrosio, C. y C. Gradín (2001) "Polarización intergeneracional y exclusión social de los niños en España e Italia" en *Desigualdad, redistribución y bienestar: Una aproximación a partir de la microsimulación de reformas fiscales*, J.M. Labeaga y M. Mercader Prats (Coord.), IEF, 2001, 97-129.
- Esteban, Joan (1994), "La desigualdad interregional en Europa y en España: descripción y análisis", en: *Crecimiento y convergencia regional en España y Europa*, Institut d'Anàlisi Econòmica, Fundació de Economia Analítica, Campus UAB, Bellaterra, Barcelona, 13-82.
- (1996), "Desigualdad y polarización. Una aplicación a la distribución interprovincial de la renta en España", *Revista de Economía Aplicada*, Núm. 11, vol. IV, 5-26.
- y D. Ray (1991) "On the measurement of polarization", *Institute for Economic Development*, discussion paper, February.
- y D. Ray (1994), "On the Measurement of Polarization", *Econometrica*, 62, 819-52.
- , Carlos Gradín y Debraj Ray (1999), "Extensions of a Measure of Polarization, with an Application to the Income Distribution of Five OECD Countries", Luxembourg Income Study, *Working Paper Series*, 218, Maxwell School of Citizenship and Public Affairs, Syracuse, New York, Syracuse University.
- Gradín, Carlos (2000) "Polarization by Sub-populations in Spain: 1973-91", *Review of Income and Wealth*, December, Series 46, (4), 457-74.
- (1999a), "Polarization and Inequality: An International Comparison", tesis doctoral no publicada, Departamento de Economía e Historia Económica, Universidad, Autónoma de Barcelona, 46-68.
- (1999b), "Polarization and Inequality in Spain: 1973-91", *Documento de Trabajo* 9907, Departamento de Economía Aplicada, Universidad de Vigo.
- (1995), "A Note on the measurement of polarization", mimeo, Universitat Autònoma de Barcelona.
- y Máximo, Rossi (2001), "Income Distribution in Uruguay: The Effects of Economic and Institutional Reforms", *Documento de Trabajo* 3/01, Departamento de Economía, Facultad de Ciencias Sociales, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay.
- Horrigan, M. y S. Haugen (1988), "The Declining Middle Class: a sensitivity analysis", *Monthly Labour Review*, Mayo.
- Jenkins, S. (1996), "Recent trends in the UK income distribution: What happened and why?", *Oxford Review of Economic Policy*, 12(1), 29-46.
- (1995), "Did the middle class shrink during the 1980s? UK evidence from kernel density estimates", *Economics letters*, (49), 407-413.
- Marron, J.S. y H.P. Schmitz (1992) "Simultaneous density estimation of several income distributions", *Journal of Econometric Theory*, 8, 476-488.
- Mookherjee, D. and Shorrocks, A. (1982) "A Decomposition Analysis of the Trend in the UK Income Inequality", *The Economic Journal*, 92(4), 886-902.

- Paraje, G. (2001), "Inequality and Polarisation in the Great Buenos Aires, 1986-1999", Presented in The XVIII Latin American Meeting of The Econometric Society, Buenos Aires, Argentina, University of Cambridge, 1-44.
- Quah, D. T. (1997) "Empirics for Growth and Distribution: Stratification, Polarization, and Convergence Clubs", *Journal of Economic Growth* Vol. 2: 27-59.
- Rosenthal, N. (1985), "The Shrinking Middle Class: Myth or Reality?", *Monthly Labour Review*, Marzo.
- Wang, Y. y Tsui, K. (2000) "Polarization orderings and new classes of polarization indices", *Journal of Public Economic Theory*, 28(3), 349-63.
- Wolfson, M. (1994), "When Inequalities Diverge", *American Economic Review*, 84, 2, 353-58.
- (1997), "Divergent Inequalities: Theory and Empirical Results", *Review of Income and Wealth*, 43, 4, 401-21.
- Yitzhaki, S. (1994) "Economic Distance and Overlapping of Distributions", *Journal of Econometrics*, 61, 147-59.
- Zhang, X. y R. Kanbur (2001) "what Difference Do Polarization Measures Make? An Application to China", *Journal of Development Studies*, 37(3), 85-98.